EXERCICE N°1 : 20' 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1°) a) Vérifier que : $-7-4i\sqrt{2}=\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2+z+2+i\sqrt{2}=0$.

2°) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=-i\sqrt{2}$, $z_B=-1+i\sqrt{2}$ et $z_C=\overline{z_A}$.
Montrer que C est un point du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$

3°) A tout M du plan d'affixe z distinct de chacun des points A et B, on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}$$

a) Montrer que si l'affixe z' du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.

b) Montrer que si $|z'|=1$, alors M est un point de la médiatrice Δ du segment $[AB]$.

4°) Soit E le point d'affixe $z_E=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}i$ et E' le point d'affixe $z_{E'}=\frac{z_E+1-i\sqrt{2}}{z_E+i\sqrt{2}}$.

a) Montrer que $z_{E'}=-i$.

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle $(\mathscr{C})$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(6,0,0)$; $B(0,6,0)$; $C(0,0,6)$ et $D(-2,-2,-2)$

1°) a) Vérifier que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x+y+z-6=0$.

b) Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

c) Donner un système d'équation paramétriques de la droite (OD).

d) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan P. Vérifier que H a pour coordonnées $(2,2,2)$ et qu'il est équidistant de A, B et C.

e) En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

2°) Soit Q le plan médiateur du segment $[CD]$.

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est : $x+y+4z-6=0$.

b) Montrer que (OD) coupe Q en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

3°) Soit S la sphère de centre Ω et rayon $3\sqrt{3}$.

a) Ecrire une équation cartésienne de S.

b) Vérifier que S passe par A, B, C et D.

c) Quelle est alors l'intersection de S et P ?

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn
Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn